ネットワークとマトロイドについて (実験配置の理論と応用)

木下, 循

数理解析研究所講究録
404巻 1980年 130-134

ネットワークとマトロイド

北大　　木下　循

内要　Capacityにマトロイド的な制限を持つネットワークについての max-flow min-cut 定理の解説。

定義

Map $(E, \mathbb{Z}^+)$ でEから $\mathbb{Z}^+$ への写像全体からなる集合を表わす。（ただし $\mathbb{Z}^+$ は非負整数全体の集合。）

$\varphi, \psi \in$ Map $(E, \mathbb{Z}^+)$ について $\varphi \leq \psi \overset{def.}{\Longleftrightarrow} \varphi(a) \leq \psi(a)$ $(\forall a \in E)$，また $\|\varphi\| := \sum_{a \in E} \varphi(a)$ と定義する。（ただしEは有限集合とする。）

定義　(integral) polymatroid ;

有限集合Eと $\mathcal{F} \subseteq$ Map $(E, \mathbb{Z}^+)$ への組 $(E, \mathcal{F}) =: M$ が次を満足するときMを（E上の, independent vectors $\mathcal{F}$ を持つ）polymatroid と言う。

i) 0写像は$\mathcal{F}$に含まれる。

ii) $\varphi \in \mathcal{F}$, $\psi \le \varphi \Rightarrow \psi \in \mathcal{F}$。

iii) 任意の$\varphi_0 \in Map(E, \mathbb{Z}^+)$について,

$$\mathcal{F}_{\varphi_0} := \{\varphi \in \mathcal{F} \mid \varphi \le \varphi_0\}$$

とおくと$\mathcal{F}_{\varphi_0}$のすべての極大元φについての$\|\varphi\|$は一定。(この一定の値をMのφ_0におけるrankと言い$r(\varphi_0)$で表す。)

ここではさらに便宜上 $\max_{\varphi \in \mathcal{F}} \|\varphi\| < \infty$ を仮定する。

polymatroid $M = (E, \mathcal{F})$が特に$\forall \varphi \in \mathcal{F}$, $\forall a \in E$について$\varphi(a) \le 1$を満たすときMはマトロイドと言う。この場合$\varphi \in Map(E, \mathbb{Z}^+)$, $\varphi(a) \le 1$ $(\forall a \in E)$と$\{a \in E \mid \varphi(a) = 1\}$を同一視することにより$\mathcal{F}$はEの部分集合の族と考えてよい。

$\varphi_0 \in Map(E, \mathbb{Z}^+)$に対して$\langle \varphi_0 \rangle := \{\varphi \mid 0 \le \varphi \le \varphi_0\}$, $M\langle \varphi_0 \rangle := (E, \langle \varphi_0 \rangle)$と置く。$M\langle \varphi_0 \rangle$はポリマトロイドとなる。

以下ではネットワークの概念を拡張することを目標とする。有限集合V(点集合)($|V| = n$とおく)とV上の2n個のポリマトロイドの族(capacity)

$$\Gamma^+ := \{(V, \mathcal{F}_a^+)\}_{a \in V}, \quad \Gamma^- := \{(V, \mathcal{F}_a^-)\}_{a \in V},$$

の組$G = (V, \Gamma^+, \Gamma^-)$を考える。この時Gのindependent graph (with capacity)で次の条件を満たす $\varphi \in Map(V\times V, \mathbb{Z}^+)$ (或いは組 (V,φ))を意味することにする。

「$\forall a \in V$ に対し, $\varphi(a,\cdot)\in \mathcal{F}_a^+$, $\varphi(\cdot,a)\in \mathcal{F}_a^-$.」

次に source, 及び sink と呼ばれる特別な2点 c、d $\in V$ を固定する。

G の (independent) flow (from c to d) とは、G の independent graph φ でさらに $\forall a \in V$, $a \neq c, d$ について $\|\varphi(c,\cdot)\| = \|\varphi(\cdot,c)\|$ を満たすものを言う。φ の value $w(\varphi)$ を $w(\varphi) := \|\varphi(c,\cdot)\| - \|\varphi(\cdot,c)\|$ で定める。(これは $\|\varphi(\cdot,d)\| - \|\varphi(d,\cdot)\|$ に等しい.)

$V=A+B$, $A\ni c$, $B\ni d$ なる分割(cut)に対して, capacity $c(A,B)$を次のように定める; G の independent graph φ で $\varphi|_{A\times A} = \varphi|_{B\times B} = \varphi|_{B\times A} = 0$ を満たすもの全体の集合を P とする。このとき

$$c(A,B) := \max_{\varphi\in P}\|\varphi\|$$

と置く。

定理(max-flow, min-cut theorem);

$$\max_{\varphi;\, flow} w(\varphi) = \min_{\substack{A+B=V\\ A\ni c\\ B\ni d}} C(A,B)$$

応用例，2部グラフに関するある命題。

（言葉が簡単になるので）一応デザインの言葉を使って説明する。

1デザイン $\mathcal{D}=(\mathcal{P},\mathcal{B})$（$\mathcal{P}$；点の集合，$\mathcal{B}$；ブロックの集合）を

$$\mathcal{P}=\mathcal{P}_1+\mathcal{P}_2+\cdots\cdots+\mathcal{P}_s$$
$$\mathcal{B}=\mathcal{B}_1+\mathcal{B}_2+\cdots\cdots+\mathcal{B}_t$$

と分割した場合（$\mathcal{P}_i$，$\mathcal{B}_j$）について $\mathcal{D}$ から導かれる結合関係が簡単になる場合を考える．例えば一番単純な場合として次の（※）の性質が考えられる。

（※）$\forall i,j$，$\forall a\in\mathcal{P}$，$\forall A\in\mathcal{B}$ について次が成立。

$$|(a)\cap\mathcal{B}_j|\leq 1$$
$$|(A)\cap\mathcal{P}_i|\leq 1\ 。$$

命題

正の整数 v，b，k，r，$x_1,\cdots x_s$，$y_1,\cdots y_t$，（ただし，$vr=bk$）を与える。次のような性質を持つパラメーター v，b，k，r の1デザイン $\mathcal{D}=(\mathcal{P},\mathcal{B})$ が存在するための必要十分条件は次の（※※）が成立することである。

「（性質）

$$\mathcal{P}=\mathcal{P}_1+\mathcal{P}_2+\cdots+\mathcal{P}_s\ ,\ |\mathcal{P}_i|=x_i$$

$$B = B_1 + B_2 + \cdots + B_t \qquad |B_j| = y_j$$

なる性質(※)を持つような分割が存在する。」

(※※) すべての $\Phi \in Map(\{1 \cdots s\}, Z^+)$, $\Phi(i) \le x_i$

$\Psi \in Map(\{1 \cdots t\}, Z^+)$, $\Psi(j) \le y_j$

について次が成立。

$$rk + \sum_{i,j} \min(\Phi(i), \Psi(j)) - k \sum_i \Phi(i) - r \sum_j \Psi(j) \ge 0$$

㊟ 次のようなグラフ (V, Γ^+, Γ^-) $(\Gamma^+ = \{(V, \mathcal{J}_a^+)\}_{a \in V}$, $\Gamma^- = \{(V, \mathcal{J}_a^-)\}_{a \in V})$ について定理を適用する。

$$V := \{c\} + \{d\} + \{a_1^1 \cdots a_{x_1}^1\} + \cdots + \{a_1^s \cdots a_{x_s}^s\}$$
$$+ \{b_1^1 \cdots b_{y_1}^1\} + \cdots + \{b_1^t \cdots b_{y_t}^t\}$$

source c, sink d.

$\mathcal{J}_c^- = \{\phi\}$, $\mathcal{J}_c^+ = \langle \varphi \rangle$ $(\varphi(a_i^j) = k,\ \varphi(b_{i'}^{j'}) = \varphi(d) = 0)$

$\mathcal{J}_d^+ = \{\phi\}$, $\mathcal{J}_d^- = \langle \psi \rangle$ $(\psi(a_i^j) = \psi(c) = 0,\ \psi(b_{i'}^{j'}) = r)$

$\mathcal{J}_{a_i^j}^+ = \{X \subseteq \{b_{k_1}^1 \cdots b_{k_t}^t\} \mid 1 \le k_i \le y_i\}$, $\mathcal{J}_{a_i^j}^- = \{\phi, \{c\}\}$,

$\mathcal{J}_{b_{i'}^{j'}}^- = \{X \subseteq \{a_{k_1}^1 \cdots a_{k_s}^s\} \mid 1 \le k_i \le x_i\}$, $\mathcal{J}_{b_{i'}^{j'}}^+ = \{\phi, \{d\}\}$.

($(V, \mathcal{J}_a^\pm)$ がマトロイドになる部分では $\mathcal{J}_a$ は集合族として表わしている。)